ELEMENTARE FUNKTIONEN, KOMPLEXE ZAHLEN

Wir beschäftigen uns weiter mit elementaren Funktionen, Reihenentwicklungen und komplexen Zahlen.

[P22] *Asymptotisches Verhalten*
Geben Sie das asymptotische Verhalten für große x für die folgenden Funktionen an:

(a) $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$,
(b) $\ln(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$,
(c) $\dfrac{x}{\ln\,\sinh x}$.

[P23] *Umkehrfunktionen*
Drücken Sie die Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} y$ von $\sinh x$ durch den natürlichen Logarithmus $\ln$ aus. Bestimmen Sie daraus $\partial_y \operatorname{arsinh} y$. Welches Resultat erhalten Sie, wenn Sie $\partial_y \operatorname{arsinh} y$ mit Hilfe von $\partial_x \sinh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$ bestimmen?

[P24] *Komplexe Zahlen*
Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ Drehungen um die speziellen Winkel $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also

$$D_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: \mathbb{1} \quad \text{und} \quad D_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: \mathbb{i}\,.$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{i} \cdot \mathbb{i}$, $\mathbb{i}^3$, $\mathbb{i}^4$ und schließlich $(\mathbb{1} - \mathbb{i}) \cdot (\mathbb{1} + \mathbb{i})$.
(b) Entwickeln Sie $\exp(\mathbb{i}\alpha)$ in eine Taylorreihe. Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus (a), um daraus Taylorreihen für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zu erhalten.
(c) Machen Sie sich umgekehrt klar, dass Sie jede Matrix $\mathbb{z} = x\mathbb{1} + y\mathbb{i}$ für reelle x, y in der Form $r\exp(\mathbb{i}\alpha)$ schreiben können und drücken Sie r, α durch x, y aus.
(d) Zeigen Sie schließlich, dass auch Ausdrücke der Form $(a\mathbb{1} + b\mathbb{i}) \cdot (c\mathbb{1} + d\mathbb{i})$ und $\dfrac{a\mathbb{1} + b\mathbb{i}}{c\mathbb{1} + d\mathbb{i}}$ leicht wieder als $x\mathbb{1} + y\mathbb{i}$ geschrieben werden können und geben Sie jeweils x und y an.

Da offenbar Matrizen der Form $\mathbb{z}$ aus (c) unter Addition und Multiplikation geschlossen sind, und nach (d) auch die Division möglich ist, haben Sie damit gezeigt, dass die Menge der Matrizen

$$\{\mathbb{z} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) : \mathbb{z} = x\mathbb{1} + y\mathbb{i}\}$$

mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ identifiziert werden kann.